

Barwerte und Rentenbarwertfaktoren von Zahlungsreihen und Zahlungsströmen

Wilhelm Schmid

27. Oktober 2021, Würzburg

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Diskrete Zahlungen - Diskreter Zinssatz	2
3	Diskreter Zinssatz - Stetiger Zinssatz	4
4	Diskrete Zahlungen - Stetiger Zinssatz	6
5	Zahlungen - Zahlungsstrom	7
6	Übergang Zahlungsreihe - Zahlungsstrom	9

1 Einleitung

Zahlungen fallen zu bestimmten Zeitpunkten an. Die Zahlungen lassen sich mittels diskreter Zahlungsreihen abbilden. Ganz natürlich passt zu diesen Zahlungsreihen die Verwendung diskreter Zinssätze. Diesem Sachverhalt liegt die Vorstellung zugrunde, dass auch Zinszahlungen zu bestimmten Zeitpunkten anfallen. Für den Fall einer Zahlungsreihe mit konstanten Zahlungen lässt sich ein Rentenbarwertfaktor ableiten.

Zinsen und andere Zahlungen beziehen sich aber meist auf Zeiträume. Werden die Zeiträume immer weiter in immer kleinere Einheiten unterteilt, gelangt man schließlich zur Vorstellung stetiger Zinszahlungen. Stetige Zinsen lassen sich mittels der Exponentialfunktion modellieren. Auch im Falle stetiger Zinsen kann man Rentenbarwertfaktoren ermitteln.

Analog der Vorstellung stetiger Zinszahlungen lässt sich auch eine Zahlungsreihe in einen stetigen Zahlungsstrom umwandeln. Indem man den Zeitraum sukzessive in immer kleinere Zeiträume unterteilt, sieht man wie die diskreten Barwertfaktoren sich dem stetigen Barwertfaktor immer stärker annähern.

Die Zusammenhänge wurden bereits z.B. in [CW88][848ff.] dargestellt, erheben also keinesfalls einen Anspruch auf Originalität.

2 Diskrete Zahlungen - Diskreter Zinssatz

Diskrete Zahlungen fallen zu einem bestimmten Zeitpunkt t an, z_t , und zwar von $t=1$ bis $t=n$. Zum Beispiel als Entlohnung für eine im Zeitraum $t-1$ bis t geleistete Arbeit. Oder als Umsatzerlös für eine im Zeitraum $t-1$ bis t erfolgte unternehmerische Tätigkeit.

Die Summe S der Zahlungen ergibt sich für den diskreten Fall mit

$$S = \sum_{t=1}^n z_t \quad (1)$$

Fallen z.B. 3 Zahlungen à 100 EUR über 3 Jahre jeweils zum Jahresende an, dann ergibt sich als Summe:

$$S = \sum_{t=1}^3 100 \text{ EUR} = 100 \text{ EUR} \sum_{t=1}^3 1 = 100 \text{ EUR} \cdot 3 = 300 \text{ EUR} \quad (2)$$

In der Regel ist aber der abgezinste Barwert dieser Zahlungsreihe interessanter.¹ Sei R ein diskreter Zinssatz, der über einen Zeitraum $t-1$ bis t und immer am Ende des Zeitraums auf das angelegte Kapital bezahlt wird, dann ist der Barwert der Zahlungsreihe die Summe der abdiskontierten Zahlungen:

$$B = \sum_{t=1}^n z_t (1 + R)^{-t} \quad (3)$$

Für $R = 5\%$ ergibt sich bei 3 Zahlungen à 100 EUR über 3 Jahre als Barwert:

$$B = \sum_{t=1}^3 100 \text{ EUR} (1 + 0,05)^{-t} \quad (4)$$

$$B = 100 \text{ EUR} \left(\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,05^2} + \frac{1}{1,05^3} \right) \quad (5)$$

$$B = 100 \text{ EUR} (0,9524 + 0,9070 + 0,8638) = 272,32 \text{ EUR} \quad (6)$$

Für konstante Zahlungen, d.h. $z_t = z$ kann die Gleichung auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$B = z \sum_{t=1}^n (1 + R)^{-t} \quad (7)$$

¹Siehe z.B. [ST96][126ff.], [FH09][169ff.], [CW88][28ff.]

Der Ausdruck $\sum_{t=1}^n (1+R)^{-t}$ kann in einer geschlossenen Form als Rentenbarwertfaktor, RBF, angegeben werden:

$$RBF = \sum_{t=1}^n (1+R)^{-t} \quad (8)$$

$$RBF = \frac{1}{1+R} + \frac{1}{(1+R)^2} + \dots + \frac{1}{(1+R)^n} \quad (9)$$

Multipliziert man Gleichung (9) mit $1+R$,

$$RBF(1+R) = 1 + \frac{1}{1+R} + \frac{1}{(1+R)^2} + \dots + \frac{1}{(1+R)^{n-1}} \quad (10)$$

und zieht von dieser Gleichung (9) ab, erhält man:

$$RBF(1+R) - RBF = 1 - \frac{1}{(1+R)^n} \quad (11)$$

und schließlich für den Rentenbarwertfaktor:

$$RBF = \frac{1 - \frac{1}{(1+R)^n}}{R} \quad (12)$$

Oder etwas umgeformt:

$$RBF = \frac{(1+R)^n - 1}{(1+R)^n R} \quad (13)$$

Will man betonen, dass der Rentenbarwertfaktor eine Funktion zweier Variablen R und n ist, schreibt man:

$$RBF(R; n) = \frac{(1+R)^n - 1}{(1+R)^n R} \quad (14)$$

Für unser Beispiel mit den 3 Zahlungen über 3 Jahre und $R = 5\%$ beträgt der Wert des Rentenbarwertfaktors:

$$RBF(0,05; 3) = \frac{(1+0,05)^3 - 1}{(1+0,05)^3 0,05} = 2,7232 \quad (15)$$

Der Rentenbarwertfaktor multipliziert mit der Zahlung von 100 EUR, die über 3 Jahre jeweils am Jahresende anfällt, ergibt den bereits oben ermittelten Barwert in Höhe von 272,32 EUR.

Im Falle einer unendlichen Rente, also unendlich vielen Zahlungen, die immer am Ende eines Zeitraums anfallen, beträgt der Rentenbarwertfaktor das Limit für $n \rightarrow \infty$:²

$$RBF(R; \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{(1+R)^n}}{R} = \frac{1}{R} \quad (16)$$

²Dies gilt aber nur für positive Zinsen, $R > 0$. Im Falle nichtpositiver Zinsen geht der Rentenbarwertfaktor gegen unendlich.

Für unser Beispiel mit $R = 5\%$ beträgt der Rentenbarwertfaktor für die unendliche Rente $1/0,05 = 20$. Zum Beispiel ist der Barwert einer unendlichen Rente in Höhe von 100 EUR gleich 2000 EUR. Obwohl unendlich viel Geld fließt, ist der Barwert bei einem Zinssatz von 5% nicht unendlich, sondern gleich dem Betrag, der am Kapitalmarkt angelegt werden müsste, um diese unendliche Rente zu erzielen.

3 Diskreter Zinssatz - Stetiger Zinssatz

Geht man von einer diskreten Verzinsung zu einer stetigen Verzinsung über, dann passieren zwei Dinge. Einerseits erhöht sich die Anzahl der Zeiträume in denen verzinst wird, andererseits wird der verwendete Zinssatz kleiner. Teilt man ein Jahr in m gleiche Teile, dann ergibt sich für den resultierenden Zinssatz in einem Jahr:

$$\left(1 + \frac{R}{m}\right)^m \quad (17)$$

In einem Zeitraum von $1/m$ Jahr wird ein Zinssatz in Höhe von R/m erzielt. Dieser Zinssatz wird m mal in einem Jahr erzielt. Die Effekte heben sich aber nicht auf. Geht man von einem gegebenen Zinssatz aus, wird der resultierende Zinssatz immer höher. Für einen Jahreszins in Höhe von $R = 5\%$ ergeben sich folgende Zinssätze:

m	$\left(1 + \frac{R}{m}\right)^m$
1	5,0000%
2	5,0625%
4	5,0945%
12	5,1162%
52	5,1246%
360	5,1267%
365	5,1267%
$\rightarrow \infty$	5,1271%

Der letzte Wert für $m \rightarrow \infty$ ergibt sich durch folgende Grenzwertbetrachtung:³

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{R}{m}\right)^m = e^R \quad (18)$$

Durch gleichsetzen können man unterjährige Zinsen r so berechnet werden, dass eine jährliche Verzinsung von R resultiert, also ein unterjähriger äquivalenter Zinssatz resultiert,

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = 1 + R \quad (19)$$

Auflösen nach r ergibt:⁴

³Siehe z. B. [Chi84][274ff.]

⁴Für e^x kann man auch $\exp(x)$ schreiben. In Excel wird die Exponentialfunktion über $+\text{EXP}(.)$ angesprochen.

$$\ln \left(1 + \frac{r}{m} \right)^m = \ln(1 + R) \quad (20)$$

$$m \ln \left(1 + \frac{r}{m} \right) = \ln(1 + R) \quad (21)$$

$$\ln \left(1 + \frac{r}{m} \right) = \frac{\ln(1 + R)}{m} \quad (22)$$

$$\left(1 + \frac{r}{m} \right) = \exp \left(\frac{\ln(1 + R)}{m} \right) \quad (23)$$

$$\frac{r}{m} = \exp \left(\frac{\ln(1 + R)}{m} \right) - 1 \quad (24)$$

$$r = m \left[\exp \left(\frac{\ln(1 + R)}{m} \right) - 1 \right] \quad (25)$$

Die obige Tabelle erweitert um eine Spalte für den unterjährigen äquivalenten Zinssatz r resultiert in:

m	$(1 + \frac{R}{m})^m$	Unterj. äquiv. Zinssatz r
1	5,0000%	5,0000%
2	5,0625%	4,9390%
4	5,0945%	4,9089%
12	5,1162%	4,8889%
52	5,1246%	4,8813%
360	5,1267%	4,8793%
365	5,1267%	4,8793%
$\rightarrow \infty$	5,1271%	4,8790%

Der zum diskreten Zinssatz R äquivalente stetige Zinssatz $r = 4,8790\%$ in der letzten Zeile resultiert aus der Gleichsetzung von e^r und $(1 + R)$ und auflösen nach r :

$$e^r = 1 + R \quad (26)$$

$$\ln(e^r) = r \ln(e) = r = \ln(1 + R) \quad (27)$$

Der unterjährige äquivalente Zinssatz wird immer kleiner, da der Zinseszinsseffekt mit steigendem m immer stärker wird. Beim stetigen Zinssatz ist dieser Zinseszinsseffekt maximal und der unterjährige äquivalente Zinssatz minimal.

Alternativ lassen sich die äquivalenten unterjährigen Zinssätze über

$$r = [(1 + R)^{\frac{1}{m}} - 1] \cdot m \quad (28)$$

herleiten.

4 Diskrete Zahlungen - Stetiger Zinssatz

Die Zahlungen werden weiterhin durch eine Zahlungsreihe beschrieben. Der Zinssatz seit nun aber stetig, und zwar so, dass derjenige stetige Zinssatz r herangezogen wird, der zum Jahreszins R äquivalent ist, $r = \ln(1 + R)$. Die Zahlungsreihe diskontiert mit dem stetigen Zinssatz berechnet sich wie folgt:

$$B = \sum_{t=1}^n z_t e^{-rt} \quad (29)$$

Setzt man den zu e^r äquivalenten Zinssatz $1 + R$ in die Gleichung ein, sieht man, dass der Barwert tatsächlich unverändert ist:

$$B = \sum_{t=1}^n z_t (1 + R)^{-t} \quad (30)$$

Dies sieht man auch an unserem Beispiel von oben. Der Barwert der Zahlungsreihe, diskontiert mit dem äquivalenten stetigen Zinssatz, beträgt:

$$B = 100 \left(e^{-(0,0488) \cdot 1} + e^{-(0,0488) \cdot 2} + e^{-(0,0488) \cdot 3} \right) \quad (31)$$

$$= 100 \cdot 2,7232 = 272,32 \quad (32)$$

Das ist der weiter oben mit den diskreten Zinssätzen erzielte Barwert. Letztendlich liegt das an der Berechnung des äquivalenten stetigen Zinssatzes mittels $\ln(1 + R)$. Auch hier lässt sich ein Rentenbarwertfaktor für den Ausdruck $e^{-r} + e^{-2r} + \dots + e^{-nr}$ angeben:

$$RBF_d(r; n) = e^{-r} + e^{-2r} + \dots + e^{-nr} \quad (33)$$

Dieser Ausdruck wird mit e^r durchmultipliziert und man erhält:

$$RBF_d(r; n)e^r = 1 + e^{-r} + e^{-2r} + \dots + e^{-(n-1)r} \quad (34)$$

Zieht man den ursprünglichen Rentenbarwertfaktor ab, fallen die Summanden e^{-r} , e^{-2r} , $\dots$, $e^{-(n-1)r}$ weg:

$$RBF_d(r; n)e^r - RBF_d(r; n) = 1 - e^{-nr} \quad (35)$$

Und schließlich:

$$RBF_d(r; n) = \frac{1 - e^{-nr}}{e^r - 1} \quad (36)$$

Setzt man für e^r $(1 + R)$ ein,

$$RBF_d(r; n) = \frac{1 - (1 + R)^{-n}}{(1 + R) - 1} = RBF(R; n) \quad (37)$$

sieht man wieder den oben für den diskreten Fall abgeleiteten Rentenbarwertfaktor $RBF(R; n)$. Die Äquivalenz liegt auch hier an der Konstruktion des äquivalenten stetigen Zinssatzes mittels $(1 + R) = e^r$.

Für den Fall einer unendlichen Rente ergibt der Rentenbarwertfaktor:

$$RBF_d(r; \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-nr}}{e^r - 1} = \frac{1}{e^r - 1} \quad (38)$$

Auch hier sieht man, wenn $e^r = 1 + R$ eingesetzt wird, dass $RBF_d(r; \infty) = RBF(R; \infty)$ resultiert.

5 Zahlungen - Zahlungsstrom

Anstatt Zahlungen pro Zeitpunkt t , z_t , zu betrachten, kann man auch das Konzept eines Zahlungsstroms für die Bewertung heranziehen, $z(t)$, d.h. eines Zahlungsflusses.

Verdient ein Angestellter z.B. 20 EUR pro Stunde, dann ist beim Konzept Zahlungen pro Zeitpunkt t , $z_t = 20$. Die Zeitpunkte sind hier die Stunden.

Bei der stetigen Darstellung ergibt sich ein konstanter Zahlungsstrom von 20 EUR/h, $z(t) = 20$ EUR/h. Dabei lässt sich im Unterschied zur diskreten Darstellung jedem Zeitpunkt der Zahlungsstrom zuordnen.

Auch hier liegt die Vorstellung zugrunde, dass Zahlungen über Zeiträume realisiert werden. Ein Monatslohn ist tatsächlich eine Entlohnung für eine über einen bestimmten Zeitraum ausgeübte Arbeit. Eine Mietzahlung ist der Preis für die Überlassung einer bestimmten Sache für einen bestimmten Zeitraum.

Im stetigen Fall ist einem Zeitpunkt nur ein Zahlungsstrom zugeordnet, die Summe der Zahlungen ermittelt man mit Hilfe des Integrals über den Zahlungsstrom:

$$S = \int_0^n z(t) dt \quad (39)$$

Für einen konstanten Zahlungsstrom mit 100 EUR/Jahr, der sich über drei Jahre erstreckt, ergibt sich die Summe der Zahlungen mit:⁵

$$S = \int_0^3 100 \frac{\text{EUR}}{y} dt \quad (40)$$

Das Integral in (40) lässt sich auflösen:

⁵y steht für Jahr oder Jahre.

$$S = 100 \frac{\text{EUR}}{y} [t \cdot y]_0^3 \quad (41)$$

Und schließlich erhält man für die Summe der Zahlungen durch Einsetzen der Grenzen:

$$S = 3y \cdot 100 \frac{\text{EUR}}{y} - 0y \cdot 100 \frac{\text{EUR}}{y} = 300 \text{ EUR} \quad (42)$$

Der Barwert B ergibt sich über das Integral des abgezinster Zahlungsstroms:

$$B = \int_0^n z(t) e^{-rt} dt \quad (43)$$

Betrachtet man den Fall eines konstanten Zahlungsstroms, $z = z(t)$, dann erhält man für B:

$$B = z \int_0^n e^{-rt} dt \quad (44)$$

Der Ausdruck $\int_0^n e^{-rt} dt$ in (44) lässt sich auch hier wieder als Rentenbarwertfaktor interpretieren:

$$RBF_s = \int_0^n e^{-rt} dt \quad (45)$$

Die Stammfunktion zu e^{-rt} ist gleich $\frac{1}{-r} e^{-rt}$, damit erhält man für den Rentenbarwertfaktor:

$$RBF_s = \left[\frac{1}{-r} e^{-rt} \right]_0^n \quad (46)$$

Durch Einsetzen der Grenzen erhält man:

$$RBF_s = \left(\frac{1}{-r} e^{-rn} - \frac{1}{-r} e^{-r \cdot 0} \right) \quad (47)$$

$$RBF_s = \left(\frac{1}{-r} e^{-rn} - \frac{1}{-r} \right) \quad (48)$$

$$RBF_s = \frac{1}{-r} (e^{-rn} - 1) \quad (49)$$

$$RBF_s = \frac{1}{r} (1 - e^{-rn}) \quad (50)$$

Auch hier ist analog dem Fall diskreter Zahlungen der Rentenbarwertfaktor eine Funktion von Zinssatz r und Endzeitpunkt n:

$$RBF_s(r; n) = \frac{1}{r} (1 - e^{-rn}) \quad (51)$$

Setzt man den zur $R = 5\%$ äquivalenten stetigen Zinssatz $r = 4,8790\%$ ein, erhält man für den Rentenbarwertfaktor eines Zahlungsstroms über 3 Jahre:

$$RBF_s(0,048790; 3) = \frac{1}{0,0488} (1 - e^{-(0,488) \cdot 3}) = 2,7908 \quad (52)$$

Für den Barwert erhält man damit:

$$B = 100 \cdot RBF((4,88\%), 3) = 100 \cdot 2,7908 = 279,08 \quad (53)$$

Vergleicht man diesen Barwert mit dem weiter oben ermittelten Barwert (diskrete Zahlungen, stetiger Zinssatz), sieht man, dass der Barwert gestiegen ist. Dies liegt daran, dass hier ein Zahlungsstrom, oben eine Zahlungsreihe diskontiert wurde. Gegenüber einer Zahlungsreihe fallen beim Zahlungsstrom die Zahlungen tendenziell früher an.

Der Rentenbarwertfaktor einer unendlichen Rente, d.h. eines unendlichen Zahlungsstroms, ist:⁶

$$RBF_s(r; \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r} (1 - e^{-rn}) = \frac{1}{r} \quad (54)$$

Im Beispiel beträgt der Rentenbarwertfaktor für einen unendlichen Zahlungsstrom $1/0,0488 = 20,4959$. Um einen unendlichen Zahlungsstrom $z(t) = 100$ EUR zu realisieren, müssen am Kapitalmarkt 2049,59 Euro zu einem Zinssatz von 4,88% angelegt werden.

6 Übergang Zahlungsreihe - Zahlungsstrom

Was geschieht, wenn man die Zahlungsreihe feiner unterteilt? Und zwar nicht nur den Zinssatz, sondern auch die Zahlung. Am einfachsten lässt sich dies anhand eines Beispiels zeigen. Angenommen, man bekommt am Ende eines Jahres 100 Euro und der Zinssatz betrage 5%. Der Barwert dieser Zahlung beträgt $B = 100 \cdot 1,05^{-1} = 95,2381$. Wenn man die Periode nun in zwei gleich große Zeiträume unterteilt, dann bekommt man nach einem halben Jahr 50 Euro und nach einem Jahr nochmals 50 Euro. Der äquivalente Zinssatz für ein halbes Jahr beträgt $(1 + 0,05)^{1/2} - 1 = 2,4695\%$. Der Barwert dieser Zahlungsreihe beträgt

$$B = 50 \text{ EUR}(1,02695^{-1} + 1,02695^{-2}) = 96,4141 \text{ EUR} \quad (55)$$

Unterteilt man weiter in vier gleich große Zeiträume, erhält man als äquivalenten Zinssatz $(1 + 0,05)^{1/4} - 1 = 1,2272\%$ und nach jedem viertel Jahr wird ein Betrag von 25 Euro bezahlt. Für den Barwert ergibt sich jetzt

⁶Auch hier wieder mit der Einschränkung verbunden, dass der Zinssatz r streng positiv sein muss. Ansonsten geht der Rentenbarwertfaktor gegen unendlich.

$$B = 25 \text{ EUR}(1,01227^{-1} + 1,01227^{-2} + 1,01227^{-3} + 1,01227^{-4}) = 97,0057 \text{ EUR} \quad (56)$$

Auch hier lässt sich ein Rentenbarwertfaktor ermitteln. Allgemein beträgt bei einer Unterteilung der Periode in m gleiche Zeiträume der zu R äquivalente Zinssatz $r = (1 + R)^{1/m} - 1$ und der erhaltene Betrag z/m . Der Barwert beträgt also:

$$B = \frac{z}{m}((1 + r)^{-1/m} + (1 + r)^{-2/m} + \dots + (1 + r)^{-1}) \quad (57)$$

Um hier einen Rentenbarwertfaktor zu erhalten, multipliziert man die Gleichung mit $(1 + r)^{1/m}$ durch und erhält:

$$B(1 + r)^{1/m} = \frac{z}{m}(1 + (1 + r)^{-1/m} + \dots + (1 + r)^{-1+1/m}) \quad (58)$$

Dann kann man die beiden Gleichungen voneinander abziehen und man erhält:

$$B(1 + r)^{1/m} - B = \frac{z}{m}(1 - (1 + r)^{-1}) \quad (59)$$

Löst man nach B auf, sieht man deutlich den gesuchten Rentenbarwertfaktor:

$$B = \frac{z}{m} \frac{1 - (1 + r)^{-1}}{(1 + r)^{1/m} - 1} \quad (60)$$

Dieser kann als $RBF(r; m)$ geschrieben werden:

$$RBF(r; m) = \frac{1 - (1 + r)^{-1}}{m \cdot ((1 + r)^{1/m} - 1)} \quad (61)$$

Für verschiedene m ergeben sich folgende Rentenbarwertfaktoren:

m	Unterj. äquiv. Zinssatz r	RBF(r;m)
1	5,0000%	0,9524
2	4,9390%	0,9641
4	4,9089%	0,9701
12	4,8889%	0,9740
52	4,8813%	0,9755
360	4,8793%	0,97593074
365	4,8793%	0,97593164
$\rightarrow \infty$	4,8790%	0,97599687

Auch hier sieht man wie der Rentenbarwertfaktor gegen den weiter oben ermittelten Rentenbarwertfaktor für den stetigen Fall,

$$RBF_s(r; 1) = \frac{1}{r} (1 - e^{-r \cdot 1}) \quad (62)$$

geht.

Erweitert man das Beispiel auf mehrere Perioden, z.B. 3 Jahre, dann ergibt sich folgendes: Für $n = 3$ Perioden und $m = 1$ erhält man für den Barwert einer Zahlung von z das bereits bekannte Ergebnis:

$$B = \frac{z}{1}((1 + R)^{-1} + (1 + R)^{-2} + (1 + R)^{-3}) \quad (63)$$

Für $m = 2$ unterjährige Zahlungen in Höhe von jeweils $z/2$, ergibt sich:

$$B = \frac{z}{2}((1 + r)^{-1/2} + (1 + r)^{-1} + (1 + r)^{-3/2} + (1 + r)^{-2}) \quad (64)$$

Allgemein erhält man für den Barwert mit m unterjährigen Perioden über n Jahre:

$$B = \frac{z}{m}((1 + r)^{-1/m} + (1 + r)^{-2/m} + \dots + (1 + r)^{-(nm)/m}) \quad (65)$$

Auch hier gibt es einen Rentenbarwertfaktor. Um diesen zu erhalten, multipliziert man die Gleichung mit $(1 + r)^{1/m}$ durch und erhält

$$B(1 + r)^{1/m} = \frac{z}{m}(1 + (1 + r)^{-1/m} + \dots + (1 + r)^{-(nm)/m+1/m}) \quad (66)$$

Wie oben lassen sich die Gleichungen zusammenfassen und nach dem Barwert auflösen:

$$B \cdot (1 + r)^{1/m} - B = \frac{z}{m}(1 - (1 + r)^{-(nm)/m}) \quad (67)$$

$$B = \frac{z}{m} \frac{1 - (1 + r)^{-(nm)/m}}{(1 + r)^{1/m} - 1} \quad (68)$$

Hier sieht man deutlich den Rentenbarwertfaktor. Dieser kann als $RBF(r; m; n)$ geschrieben werden:

$$RBF(r; m; n) = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{m((1 + r)^{1/m} - 1)} \quad (69)$$

Auch hier lassen sich die numerischen Werte in einer Tabelle für verschiedene m angeben, $n = 3$, $R = 0,05$:

m	Unterj. äquiv. Zinssatz r	$RBF(r; m; 3)$
1	5,0000%	2,7232
2	4,9390%	2,7569
4	4,9089%	2,7738
12	4,8889%	2,7851
52	4,8813%	2,7895
360	4,8793%	2,79058653
365	4,8793%	2,79058653
$\rightarrow \infty$	4,8790%	2,79077564

Auch hier sieht man wie der Rentenbarwertfaktor gegen den weiter oben ermittelten Rentenbarwertfaktor für den stetigen Fall,

$$RBF_s(r; 3) = \frac{1}{r} (1 - e^{-r \cdot 3}) \quad (70)$$

geht. Im Vergleich zu den Formeln für unterjährige nichtstetige Zahlungen geht die Verwendung stetiger Zinssätze tatsächlich mit einer Vereinfachung einher.

Literatur

- [Chi84] Alpha C. Chiang. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. 2. Aufl. New York et al.: McGraw-Hill, 1984.
- [CW88] Thomas E. Copeland und J. Fred Weston. *Financial Theory and Corporate Policy*. 3. Aufl. Reading, Mass., et al.: Addison-Wesley, 1988.
- [FH09] Günter Franke und Herbert Hax. *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*. 6. Aufl. Dordrecht et al.: Springer, 2009.
- [ST96] Reinhard H. Schmidt und Eva Terberger. *Grundzüge der Investitions- und Finanzierungstheorie*. 3. Aufl. Wiesbaden: Gabler, 1996.