Binomiales Repräsentationstheorem - Part I: Keine Zinsen

Wilhelm Schmid

5. November 2021, Würzburg

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1

2 Arbitrage I 2

3 Derivat 2

4 Martingal 3

5 Das binomiale Repräsentationstheorem 4

6 Arbitrage II 5

7 Schlussbemerkungen 7

1 Einleitung

Mittels des binomialen Repräsentationstheorem kann anhand eines einfachen Modells das prinzipielle Vorgehen bei der Duplikation unsicherer Zahlungsstrukturen gezeigt werden. Die Einsichten, die mit Hilfe dieses Modells gewonnen werden, können für das Verständnis des martingalen Repräsentationstheorem hilfreich sein. Das martingale Repräsentationstheorem kann für die Bewertung von Derivaten in realistischeren Modellen herangezogen werden.

Die folgenden Ausführungen beruhen auf [BR96][35 ff.].[1]

Als durchgehendes Beispiel sei ein sehr einfacher stochastischer Prozess betrachtet:

Eine Aktie hat im Zeitpunkt $t = 0$ einen Wert S, eine Zeiteinheit später in $t = 1$ erhöht sich der Wert der Aktie auf S_u oder fällt auf S_d, siehe Abbildung 1.

[1] Ein weiterer Text auf einem ähnlichen Abstraktionsniveau wie [BR96] ist [Nef96].

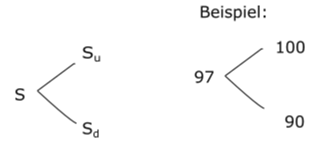

Abbildung 1: Stochastischer Prozess mit zwei Umweltzuständen, Aktie

Der Zinssatz betrage in diesem einfachen Modell sowohl für die Geldanlage als auch die Kreditaufnahme Null. Das bedeutet, es gibt ein zweites, zugegebenermaßen recht triviales Wertpapier mit dem Wert B_0 in $t = 0$ und $B_u = B_d = B$ in $t = 1$. Da der Zins hier gleich 0 sein soll, ist auch $B = B_0$. Geldanlage bedeutet hier, Geld in $t = 0$ in eine Schublade zu legen und eine Periode später in $t = 1$ wieder aus der Schublade zu holen. Kreditaufnahme bedeutet hier, Geld in $t = 0$ zur Verfügung gestellt zu bekommen und eine Periode später in $t = 1$ den gleichen Betrag zurückzubezahlen.

Man kann sich Geldanlage und Kreditaufnahme auch in Form eines Wertpapiers vorstellen, nämlich einer Anleihe (oder eines Bonds). B_0 ist dann der Preis für diese Anleihe in $t = 0$ und B ist der Preis der Anleihe in $t = 1$. In einer Welt mit einem Zinssatz in Höhe von 0 ist $B = B_0$. Die gesamte Geldanlage/Kreditaufnahme ergibt sich dann über die Multiplikation des Preises mit einem Nominal.

2 Arbitrage I

Arbitrageüberlegungen führen dazu, dass S zwischen S_d und S_u liegen muss: Ist S kleiner als oder gleich S_d kann man durch Kreditaufnahme und Kauf der Aktie einen risikofreien Gewinn erzielen. Ist S größer als oder gleich S_u kann man durch den Verkauf der Aktie und Anlage des Verkaufserlöses einen risikofreien Gewinn erzielen.

Eine ähnliche Überlegung gilt für die risikolose Geldanlage bzw. Kreditaufnahme: Der Preis in einer Welt ohne Zinsen muss $B = B_0$ sein, sonst gäbe es auch hier die Möglichkeit einen risikofreien Gewinn zu erzielen.

3 Derivat

Neben der Aktie sei in dem Modell noch ein Derivat vorhanden. Das Derivat habe einen Wert f im Zeitpunkt $t = 0$ und einen Wert f_u, wenn S_u eintritt, und f_d, wenn S_d eintritt. Damit erklärt sich auch der Begriff Derivat. Abhängig vom Eintreten von S_u oder S_d tritt f_u oder f_d ein. Dabei kann f_u und f_d beliebig definiert werden, z. B. wie im Beispiel als klassischer Call (dabei sei X, im Beispiel 95, der Basispreis), siehe Abbildung 2.

Die Auszahlungen ermitteln sich folgendermaßen:

$$f_u = \max(S_u - X; 0) = \max(100 - 95; 0) = 5 \tag{1}$$

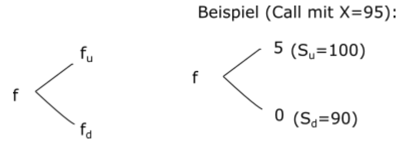

Abbildung 2: f nach f_u oder f_d; Bsp. Call mit $X = 95$ ($f_u = 5$ und $f_d = 0$)

$$f_d = \max(S_d - X; 0) = \max(90 - 95; 0) = 0 \tag{2}$$

4 Martingal

Ein Martingal ist ein stochastischer Prozess, dessen aktueller Wert gleich dem Erwartungswert ist. Martingale werden immer in Bezug auf Wahrscheinlichkeitsmaße definiert. Ein Prozess mit erwarteten Werten von 100 und 90 und einem aktuellen Wert von 97 ist für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(100) = 0,7$ und $W(90) = 0,3$ ein Martingal, da $100 \cdot 0,7 + 90 \cdot 0,3 = 97$. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(100) = 0,5$ und $W(90) = 0,5$ ist der Prozess jedoch kein Martingal, da $100 \cdot 0,5 + 90 \cdot 0,5 = 95$. Für das Modell mit der Aktie lassen sich Martingalwahrscheinlichkeiten konstruieren. Die Wahrscheinlichkeit, dass S_u eintrete, sei q, damit beträgt die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von S_d die Gegenwahrscheinlichkeit, nämlich $(q - 1)$. Der mit den Martingalwahrscheinlichkeiten berechnete Erwartungswert sei gleich dem Aktienkurs:

$$S = qS_u + (1 - q)S_d. \tag{3}$$

Auflösen nach q ergibt

$$q = \frac{S - S_d}{S_u - S_d} \tag{4}$$

Dieses q stimmt nur zufällig mit den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten überein, es ist die Folge der Relation von S, S_d und S_u und hat die Eigenschaft, dass der mit diesen Martingalwahrscheinlichkeiten berechnete Erwartungswert gleich S ist. Im Beispiel ergibt sich q wie folgt:

$$q = \frac{97 - 90}{100 - 90} = 0,7 \tag{5}$$

Und tatsächlich ist der Erwartungswert der mit diesen Wahrscheinlichkeiten mutiplizierten Zahlungen $0,7 \cdot 100 = 0,3 \cdot 90 = 97$.

Das Derivat lässt sich ebenfalls als Martingal beschreiben:

$$f = qf_u + (1 - q)f_d \tag{6}$$

Auflösen nach q ergibt einen ähnlichen Ausdruck wie oben:

$$q = \frac{f - f_d}{f_u - f_d} \tag{7}$$

Auch hier ist zu beachten, dass ein Martingal immer in Bezug auf eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert ist. Hätte f einen Wert in Höhe von 2,5, dann wäre das Derivat ein Martingal in Bezug auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(5) = 0,5$ und $W(0) = 0$, denn $2,5 = 0,5 \cdot 5 + 0,5 \cdot 0$. Aber f wäre kein Martingal für die Martingalwahrscheinlichkeiten von S:

$$2,5 <> 0,7 \cdot 5 + 0,3 \cdot 0 = 3,5 \tag{8}$$

Nur 3,5 wäre ein Martingal für die Martingalwahrscheinlichkeiten von S. Später sehen wir, dass Arbitragefreiheit tatsächlich die Bewertung des Derivats als mit den Martingalwarscheinlichkeiten von S gebildeten Erwartungswert darstellt.

Selbst die Geldaufnahme / Geldanlage, das risikolose Wertpapier lässt sich als Martingal beschreiben:

$$1 = q \cdot 1 + (1 - q) \cdot 1 \tag{9}$$

Diese Gleichung ist für alle q erfüllt. Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen, die mit 100% Wahrscheinlichkeit den Wert x annimmt ist immer x.[2]

5 Das binomiale Repräsentationstheorem

Das binomiale Repräsentationstheorem besagt, dass in $t = 0$ ein Wert ϕ existiert, so dass die zukünftigen Werte eines Martingals, im Beispiel das Derivat, in Abhängigkeit eines anderen Martingals, im Beispiel die Aktie, konstruiert werden können, siehe [BR96][35ff.]:

$$\begin{aligned} f_u &= f + \phi(S_u - S) \\ f_d &= f + \phi(S_d - S) \end{aligned} \tag{10}$$

Eliminieren von f und auflösen nach ϕ führt zu:

$$\phi = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} \tag{11}$$

Wie lässt sich ϕ herleiten? Wir nehmen an oder setzen voraus, dass sowohl die Aktie als auch das Derivat Martingale in Bezug auf dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{Q}$ sind, daher gelten folgende Beziehungen:

Aus $S = qS_u + (1 - q)S_d$ folgt:

[2] Der Kapitalmarkt ist nur mit beiden Wertpapieren, Aktie und Geldanlage/-aufnahme, vollständig. Dies sieht man deutlich, wenn man von einem Zustandspreismodell mit zwei Preisen p_u und p_d für die Aktie ausgeht. Hier wäre der Wert der Aktie tatsächlich eine von zwei unbekannten Variablen abhängige Funktion, $S = p_u S_u + p_d S_d$. Erst mit der risikolosen Geldanlage/-aufnahme resultiert eine weitere Funktion, so dass p_u und p_d eindeutig bestimmt sind, $1 = 1p_u + 1p_d$.

$$q = \frac{S - S_d}{S_u - S_d} \tag{12}$$

Aus $f = qf_u + (1-q)f_d$ folgt:

$$q = \frac{f - f_d}{f_u - f_d} \tag{13}$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen und Umformen ergibt das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{aligned} f_u &= f + \tfrac{f_u - f_d}{S_u - S_d}(S_u - S) \\ f_d &= f + \tfrac{f_u - f_d}{S_u - S_d}(S_d - S) \end{aligned} \tag{14}$$

Für unser Beispiel gilt:

$$\begin{aligned} & f_u = 3,5 + (5-0)/(100-90) \cdot (100-97) = 3,5 + 1,5 = 5 \\ & f_d = 3,5 + 0,5 \cdot (90-97) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Nur wenn f der mit den Martingalwahrscheinlichkeiten berechnete Erwartungswert ist, werden die Auszahlungen des Derivats genau getroffen. Nimmt man an, dass das Derivat nicht $3,5$, sondern z. B. 4 wert ist, folgt $f_u = 5,5$ und $f_d = 0,5$. Die Auszahlungen des Derivats werden jetzt nicht mehr getroffen, nur die Differenz zwischen f_u und f_d ist immer noch 5.

6 Arbitrage II

An dieser Stelle könnte man abbrechen, da das Ziel, den Wert des Derivats zu berechnen, erreicht wurde. Schon mit der Ableitung der Martingalwahrscheinlichkeiten konnte der Wert des Derivats berechnet werden. Das binomiale Repräsentationstheorem trifft nur eine Aussage über die Konstruktion eines Martingals aus einem anderen Martingal. Diese Konstruktion zu kennen ist wichtig, um die folgende ökonomische Argumentation nachvollziehen zu können, warum der mit den Martingalwahrscheinlichkeiten berechnete Wert tatsächlich der korrekte Wert ist.

Offen blieb bis jetzt, warum der mit den Martingalwahrscheinlichkeiten berechnete Erwartungswert gleich dem Wert des Derivats sein soll. Arbitrageüberlegungen zur Rechtfertigung des Wertes des Derivats fehlen. Es wurde nur behauptet, dass der Wert des Derivats dem mit den Martingalwahrscheinlichkeiten berechneten Erwartungswert entspricht.

Sollte es allerdings gelingen, ein Portefeuille aus der Aktie und einer Geldanlage bzw. Kreditaufnahme zu konstruieren, das dieselbe Zahlungsstruktur wie das Derivat aufweist, und dessen Wert zusätzlich dem mit den Martingalwahrscheinlichkeiten berechneten Erwartungswert entspricht, können Arbitrageüberlegungen die bisherige Wertermittlung unterstützen.

Es gilt also, ein Portefeuille zu konstruieren, das dieselben Zahlungsverteilung aufweist wie das Derivat. Ein erster Versuch ist die Verwendung des oben ermittelten Wertes ϕ

für die Anzahl der Aktien. Im Beispiel hätte man für $\phi = 0,5$ folgende Auszahlungen des Portefeuilles:

$$\begin{aligned} &p = -\phi S = 0,5 \cdot 97 = -48,5 \\ &p_u = \phi S_u = 0,5 \cdot 100 = 50 \\ &p_d = \phi S_d = 0,5 \cdot 90 = 45 \end{aligned} \tag{16}$$

Das Portefeuille bestehend aus einer halben Aktie, kostet 48,5 und hat, wenn S_u eintritt, eine Einzahlung von 50, und wenn S_d eintritt resultiert eine Einzahlung von 45. Vergleicht man diese Einzahlungen mit den Zahlungen des Derivats $f_u = 5$ und $f_d = 0$ sieht man, dass die Zahlungen des Derivats zwar nicht getroffen werden, aber die Differenz der beiden Zahlungen des Portefeuille der Differenz der beiden mit dem Derivat verbundenen Zahlungen entspricht. Dies ergibt sich aus der obigen Konstruktion von ϕ.

Da die Differenz getroffen ist, muss man nur noch einen konstanten Betrag von den beiden Einzahlungen abziehen, um die Zahlungsstruktur des Derivats genau zu treffen, im Beispiel sind das 45. Dahinter verbirgt sich eine Kreditaufnahme. In t=0 erhält man $\psi B_0 = 45$, die man in t=0 mit $\psi B = 45$ zurückzahlen muss (Praktischerweise setzt man $B_0 = B = 1$, dann ist ψ der aufgenommene bzw. angelegte Kreditbetrag). Damit ergeben sich folgende Zahlungen des Portefeuilles:

$$\begin{aligned} &p = -\phi S + \psi B_0 = -0,5 \cdot 97 + 45 = -3,5 \\ &p_u = \phi S_u - \psi B = 0,5 \cdot 100 - 45 = 5 \\ &p_d = \phi S_d - \psi B = 0,5 \cdot 90 - 45 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Da dieses Portefeuille dieselbe Zahlungsstruktur in $t = 1$ aufweist wie das Derivat, muss der Wert des Derivats 3,5 betragen. Allgemein bestimmt sich ψB_0 aus der Auflösung der Gleichung:

$$\phi S_u - \psi B = f_u \tag{18}$$

$$\psi B = \phi S_u - f_u \tag{19}$$

Wird ϕ eingesetzt, erhält man:

$$\psi B = \phi S_u - f_u = \frac{f_u S_d - f_d S_u}{S_u - S_d}. \tag{20}$$

Für das Beispiel folgt:

$$\psi B = \frac{5 \cdot 90 - 0 \cdot 100}{100 - 90} = \frac{450}{10} = 45 \tag{21}$$

Der Wert p des Portefeuilles in $t = 0$ beträgt:

$$p = \phi S - \psi B_0 \tag{22}$$

Im Beispiel ist $p = 0,5 \cdot 97 - 45 = 3,5$.
Die damit verbundenen Zahlungen in $t = 1$ sind, wenn S_u eintritt:

$$p_u = \psi B + \phi S_u = f - \phi S + \phi S_u = f + \phi(S_u - S) = f_u \qquad (23)$$

Tritt dagegen S_d ein erhält man:

$$p_d = \psi B + \phi S_d = f - \phi S + \phi S_d = f + \phi(S_d - S) = f_d \qquad (24)$$

Und weil das Portefeuille dieselben Auszahlungen wie das Derivat aufweist, nämlich f_u und f_d, muss der Wert des Derivats dem Wert des Portefeuilles entsprechen. Wäre der Wert des Derivats höher, würde das Derivat verkauft und mit f das Portefeuille gekauft werden. Wäre der Wert des Derivats niedriger, würde man das Derivat kaufen und für f das Portefeuille verkaufen. Beide Male könnte ein risikoloser Gewinn erzielt werden.

Interessanterweise ist die Bewertung von Derivaten mittels Arbitrage wesentlich einfacher als die Bewertung der den Derivaten zugrunde liegenden Basiswerte. Will man die Basiswerte mittels Arbitrage bewerten, ist man darauf angewiesen, ähnliche Wertpapiere (Substitute) zu finden. In der Praxis ist das nicht immer ganz einfach und birgt Risiken, vgl. [Shl00][13]: »…in contrast to the efficient markets theory, real–world arbitrage is risky and therefore limited.«

7 Schlussbemerkungen

- Ceteris Paribus ist bei einem niedrigeren Basiswert der Wert eines Calls höher. Der Wert eines Puts ist niedriger.

- Bei einem klassischen Call mit $f_u = \max(S_u - X; 0)$ und $f_d = \max(S_d - X; 0)$ ist ϕ zwischen 0 und 1.

- Das ϕ kann als Hedgeparameter interpretiert werden, der angibt, wieviele Aktien gekauft werden müssen, um die Auszahlung des Calls abzubilden.

- Bei einem klassischen Put mit $f_u = \max(X - S_u; 0)$ und $f_d = \max(X - S_d; 0)$ ist ϕ zwischen 0 und –1. Auch hier kann ϕ als Hedgeparameter interpretiert werden, der angibt, wie viele Aktien gekauft werden, müssen um die Auszahlung des Puts abzubilden. Das negative Vorzeichen bedeutet, die Aktien werden leer verkauft. Hier wird deutlich: der Hedgeparameter ist keine Wahrscheinlichkeit.

- Ceteris Paribus ist bei einem höheren Aktienkurs S der Wert eines Calls höher und der Wert eines Puts niedriger.

- Es lassen sich auch exotische Zahlungsstrukturen, wie z. B. »Wenn S_u den Wert übersteigt, dann erhält man aus dem Derivat eine Zahlung in Höhe von 1000«, modellieren. Auch hier gibt ϕ die Anzahl der Aktien an, die gekauft werden müssen, um die Auszahlung nachzubilden. Diese Anzahl der Aktien kann sehr hoch sein und auch hier gilt wieder, dass der Hedgeparameter natürlich keine Wahrscheinlichkeit darstellt.

- Man könnte das vorliegende Modell über mehrere Perioden und einen positiven Zinssatz erweitern, um schließlich zur Black/Scholes-Formel für die Bewertung zu gelangen, siehe z.B. [CW88][256ff.] mit weiteren Quellenangaben.

- Tatsächlich ist das vorliegende Modell recht einfach und für realistiscche Bewertungsprobleme nicht einsetzbar. Ihm liegt allerdings ein dem Martingalen Repräsentationstheorem analoger Sachverhalt zugrunde, siehe [BR96][77f.]. Und mit Hilfe dieses Theorems und der daraus entwickelten Formeln können eine Vielzahl komplexer Finanzinstrumente bewertet werden.

Literatur

[BR96] Martin Baxter und Andrew Rennie. *Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge: University Press, 1996.

[CW88] Thomas E. Copeland und J. Fred Weston. *Financial Theory and Corporate Policy*. 3. Aufl. Reading, Mass., et al.: Addison-Wesley, 1988.

[Nef96] Salih N. Neftci. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. San Diego et al.: Academic Press, 1996.

[Shl00] Andrei Shleifer. *Inefficient Markets: An Introduction to Behavioral Finance*. Oxford: University Press, 2000.