

Binomiales Repräsentationstheorem - Part II: Zinsen

Wilhelm Schmid

17. November 2021, Würzburg

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Arbitrage I - Risikolose Wertpapiere: Anleihen	2
3	Arbitrage II - Aktien	3
4	Martingale	4
5	Das Binomiale Repräsentationstheorem	5
6	Arbitrage III - Replizierendes Portefeuille	6
7	Umgekehrt: Herleitung der Bewertung mit Martingalwahrscheinlichkeiten aus dem replizierenden Portefeuille	7
8	Zinswirkung	8
9	Wirkung einer Preisänderung des Underlying	9
10	Schlussbemerkung	10

1 Einleitung

Im Folgenden wird ein sehr einfacher stochastischer Prozess modelliert: Eine Aktie hat im Zeitpunkt $t = 0$ einen Wert S , eine Zeiteinheit später erhöht sich der Wert der Aktie auf S_u oder fällt auf S_d , siehe Abbildung 1.

Der Zinssatz sei jetzt positiv und sowohl für die Geldanlage als auch die Kreditaufnahme derselbe.¹

¹Aus Vereinfachungsgründen sei angenommen, dass ein positiver Zinssatz keinen Einfluss auf den Preis der Aktie hat. Im allgemeinen hat der Zinssatz sehr wohl einen Einfluss auf risikobehaftete Finanztitel.

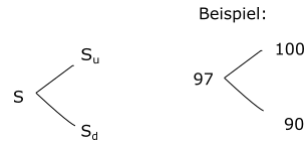


Abbildung 1: Stochastischer Prozess mit zwei Umweltzuständen, Aktie

Der Zinssatz wird mit r bezeichnet und es handelt es sich um einen stetigen Zinssatz, d.h. legt man einen Betrag K_0 für einen Zeitraum t an, bekommt man $K_0 \exp(rt)$ am Ende der Periode zurückgezahlt, z.B. erhält man für einen über 2 Jahre angelegten Betrag in Höhe von 100 EUR, der über 2 Jahre zu einem Zinssatz von 3% angelegt wird, nach zwei Jahren 106,18 EUR:

$$100 \exp(0,03 \cdot 2) = 106,18 \quad (1)$$

Für die Kreditaufnahme gilt ähnliches, für einen über zwei Jahre geliehenen Betrag von 100 EUR, müssen 6,18 EUR Zinsen neben der Tilgung bezahlt werden. Die Schublade unserer Welt ohne Zinsen wird ersetzt durch eine Bank oder einen Kapitalmarkt, die für eine risikolose Anlage r Prozent Zinsen bezahlen bzw. für einen Kredit r Prozent Zinsen verlangen. Das hier diskutierte Modell umfasst das einfachere Modell aus Teil I, nämlich für den Fall, dass $r = 0$.

Die folgenden Ausführungen beruhen auf [BR96][35 ff.].

2 Arbitrage I - Risikolose Wertpapiere: Anleihen

Das Wertpapier mit der risikolosen Einzahlung B in t hat auf arbitragefreien Märkten in $t = 0$ den Preis $B_0 = B \exp(-rt)$. Warum ist das so?

Wäre der Preis höher, $B_0 > B \exp(-rt)$, gäbe es die Möglichkeit zur Erzielung eines risikolosen Gewinns. Folgendes Portefeuille könnte zusammengestellt werden: In $t = 0$ wird das Wertpapier zu B_0 verkauft und der resultierende Erlös zu r angelegt. In t resultiert aus der Geldanlage ein Erlös aus Zins und Tilgung in Höhe von $B_0 \exp(rt)$, gleichzeitig muss den Käufern des Wertpapiers B an Tilgung und Zinsen zurückgezahlt werden. Das Portefeuille weist also folgende Zahlungsstruktur auf:

$t = 0$: 0

t : $B_0 \exp(rt) - B$

Da wir $B_0 > B \exp(-rt)$ annahmen, gilt auch $B_0 \exp(rt) - B > 0$, d. h. unser Portefeuille erzielt in t einen risikolosen Gewinn und erfordert keinen Kapitaleinsatz. Dies ist eine klare Arbitragemöglichkeit, die der Annahme arbitragefreier Märkte widerspricht.

Wäre der Preis niedriger, $B_0 < B \exp(-rt)$, erfolgt die Konstruktion des Arbitrageportefeuilles so, dass das Wertpapier gekauft und der Kauf mittels einer Kreditaufnahme finanziert wird. In $t = 0$ resultiert eine Zahlung von 0, die Zahlungen aus Kauf Wertpapier und Einzahlung aus der Kreditaufnahme heben sich auf, und in t erzielt dieses Portefeuille einen risikolosen Gewinn in Höhe von $B - B_0 \exp(rt) > 0$.

Der einzige Preis, der mit arbitragefreien Märkten vereinbar ist, ist $B_0 = B \exp(-rt)$.

3 Arbitrage II - Aktien

Angenommen in einer Welt mit Zinsen bleiben die zu erwartenden Zahlungen S_u und S_d gleich. Auf den ersten Blick scheint sich für die Bewertung der Aktie nichts geändert zu haben, denn aus dem Besitz von Aktien ergeben sich keine Zinszahlungen. Dieser erste Eindruck täuscht. Die Existenz eines Kapitalmarktes zu dem Geld zu einem positiven Zinssatz angelegt bzw. aufgenommen werden kann, verändert auch hier die Bewertung.

Und zwar verändert die Existenz eines positiven Zinssatzes die Preisunter- und Preisobergrenze. Dies lässt sich anhand eines Beispiels einer Aktie, die in $t = 1$ entweder 100 oder 90 wert ist, zeigen. Ohne Zinsen haben wir gesagt, der Preis muss zwischen 100 und 90 liegen, ansonsten gibt es Arbitragemöglichkeiten. Mit Zinsen ist die Situation etwas unübersichtlicher. Angenommen der Zins betrage 5% und der Preis liege bei 89. Gibt es jetzt schon Arbitragemöglichkeiten? Ohne Zinsen hätte man die Aktie einfach auf Kredit gekauft und in $t=1$ zu 90 oder 100 zurückgegeben und entweder 1 oder 11 Gewinn gemacht, der Preis für die Kreditaufnahme war ja annahmegemäß 0%. Mit Zinsen muss jedoch der aufgenommene Kredit verzinst werden. Zum Beispiel sind bei einem Zinssatz von 5% in $t = 1$ $89 \exp(0,051) = 93,5631$ fällig. In einer Welt mit Zinsen gibt es hier keine Möglichkeit einen risikolosen Gewinn zu erzielen, würde der Aktienkurs auf 90 fallen, verlöre man 3,5631.

Erst wenn der Preis so gering ist, dass in $t = 1$ sowohl Zins und Tilgung bedient werden können als auch ein positiver Betrag übrig bleibt, entstehen Arbitragemöglichkeiten. Das bedeutet eine untere Grenze für den Preis ist $S_d \exp(-rt)$, in unserem Beispiel für $S_d = 90$, ist die Untergrenze $90 \exp(-0,05 \cdot 1) = 85,61$. Beträgt der Preis z. B. 85 können durch auf Kredit gekaufte Aktien folgende Gewinne erzielt werden:

Ist die Aktie 90 wert, dann erzielt man einen Gewinn in Höhe von $90 - 85 \exp(0,05) = 90 - 89,36 = 0,64$. Ist die Aktie 100 wert, dann erzielt man einen Gewinn in Höhe von $100 - 85 \exp(0,05) = 10,64$. Beide Male ist der Gewinn positiv, es besteht eine Arbitragemöglichkeit.

Wie sieht es mit der Obergrenze aus? Angenommen der Preis der Aktie liege in $t = 0$ bei 98. Ohne Zinsen hätten sich keine Arbitragemöglichkeit ergeben, der Leerverkauf in $t = 0$ hätte 98 erzielt, aber es hätte das Risiko bestanden, in $t = 1$ -2 zu verlieren, dann nämlich, wenn der Aktienkurs auf 100 gestiegen wäre. Mit Zinsen gäbe es eine Arbitragegelegenheit, man verkauft in $t = 0$ die Aktie für 98 und legt das Geld für 5% an und erzielt daraus in $t = 1$ einen Erlös in Höhe von $98 \exp(0,05 \cdot 1) = 103,0246$, nach Rückgabe der Aktie für 90 oder 100 erzielt man also einen Gewinn in Höhe von 3,0246 oder 13,0246. Daraus folgt für die Preisobergrenze $S_u \exp(-rt)$, im Beispiel $100 \exp(-0,05 \cdot 1) = 95,12$

In einer Welt mit Zinsen muss der Preis der Aktie zwischen $S_d \exp(-rt)$ und $S_u \exp(-rt)$ liegen. Aus der Preisspanne $(S_d; S_u)$ in einer Welt ohne Zinsen wird eine Preisspanne $(S_d; S_u) \exp(-rt)$ in einer Welt mit Zinsen.

4 Martingale

Mit Zinsen werden Martingale auf abdiskontierte zukünftige Zahlungen definiert. Die mit den Martingalwahrscheinlichkeiten q und $(1 - q)$ multiplizierten abdiskontierten Zahlungen S_u und S_d müssen dem Aktienkurs S entsprechen:

$$\begin{aligned} S &= q \exp(-rt) S_u + (1 - q) \exp(-rt) S_d \\ S &= \exp(-rt) (q S_u + (1 - q) S_d) \end{aligned} \quad (2)$$

Da q die einzige unbekannte Variable in der Gleichung ist, lässt sich hier schon der Wert von q angeben:

$$q = \frac{S - \exp(-rt) S_d}{S_u - S_d} \quad (3)$$

Ist zum Beispiel $S = 94$, $S_u = 100$, $S_d = 90$, $t = 1$ und $r = 0,03$, dann erhält man für $q = 0,68628$. Damit ist der aufgezinste Aktienkurs ein Martingal bezüglich der Wahrscheinlichkeit q :

$$\begin{aligned} S \exp(rt) &= 94 \exp(0,03) = 96,86 \\ (q S_u + (1 - q) S_d) &= 0,68628 \cdot 100 + (1 - 0,68628) \cdot 90 = 96,86 \end{aligned} \quad (4)$$

Für das Derivat gilt ähnliches:

$$\begin{aligned} f &= q \exp(-rt) f_u + (1 - q) \exp(-rt) f_d \\ f &= \exp(-rt) (q f_u + (1 - q) f_d) \end{aligned} \quad (5)$$

Mit den obig ermittelten Wahrscheinlichkeiten kann man den Wert f für $f_u = 5$ und $f_d = 0$, also einem Call mit Basispreis 95, angeben:

$$f = \exp(-0,03) (0,68628 \cdot 5 + (1 - 0,68628) \cdot 0) = 3,33. \quad (6)$$

Dies ist der einzige Wert, der mit arbitragefreien Kapitalmärkten kompatibel ist. Auch der aufgezinste Wert f ist ein Martingal bezüglich der Wahrscheinlichkeiten q und $(1 - q)$. Natürlich kann man die Wahrscheinlichkeiten auch auf die risikolose Zahlung B anwenden. Schließlich ist die Anleihe ein Wertpapier, das in dem einen Umweltzustand B auszahlt und im andern ebenfalls B . Hier sieht man auch, warum die abdiskontierten Zahlungen mit q und $(1 - q)$ bewertet werden:

$$B_0 = \exp(-rt) (q B + (1 - q) B) \quad (7)$$

Da $B = \exp(rt) B_0$, ist die Gleichung für alle q erfüllt. Die hier abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten q und $(1 - q)$ dürfen nicht mit den tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten für die beiden Umweltzustände verwechselt werden. Die Wahrscheinlichkeiten q und $(1 - q)$ sind Resultat einer Konstruktion mit den Bestandteilen S_d , S_u , S , r und t .

5 Das Binomiale Repräsentationstheorem

Das binomiale Repräsentationstheorem besagt, dass in $t=0$ ein Wert ϕ existiert, der die Auszahlungen des Derivats, das ist das eine Martingal, zu den Auszahlungen der Aktie, die das andere Martingal darstellt, in Beziehung setzt. Dazu werden die beiden Bewertungsgleichungen für S und f kombiniert:

$$\begin{aligned} S &= \exp(-rt)qS_u + (1-q)\exp(-rt)S_d \\ f &= \exp(-rt)qf_u + (1-q)\exp(-rt)f_d \end{aligned} \quad (8)$$

Durch Umformen kann nach q aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} S - \exp(-rt)S_d &= \exp(-rt)(qS_u - qS_d) \\ f - \exp(-rt)f_d &= \exp(-rt)(qf_u - qf_d) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{\exp(rt)S - S_d}{S_u - S_d} \\ q &= \frac{\exp(rt)f - f_d}{f_u - f_d} \end{aligned} \quad (10)$$

Die beiden Gleichungen gleich gesetzt ergeben:

$$\frac{\exp(rt)S - S_d}{S_u - S_d} = q = \frac{\exp(rt)f - f_d}{f_u - f_d} \quad (11)$$

Umstellen und auflösen nach f_d ergibt:

$$\frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}(\exp(rt)S - S_d) = (\exp(rt)f - f_d) \quad (12)$$

$$f_d = \exp(rt)f + \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}(S_d - \exp(rt)S) \quad (13)$$

Für f_u erhält man durch Addition von $f_u - f_d$ auf beiden Seiten der Gleichung und anschließendem Umformen:

$$\begin{aligned} f_d + f_u - f_d &= \exp(rt)f + \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}(S_d - \exp(rt)S) + f_u - f_d \\ f_u &= \exp(rt)f + \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}(S_d - \exp(rt)S) + f_u - f_d \\ f_u &= \exp(rt)f + \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}(S_d - \exp(rt)S) + (f_u - f_d)\frac{S_u - S_d}{S_u - S_d} \\ f_u &= \exp(rt)f + \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}(S_d - \exp(rt)S + S_u - S_d) \\ f_u &= \exp(rt)f + \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}(S_u - \exp(rt)S) \end{aligned} \quad (14)$$

Definiert man $\phi = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$ können f_d und f_u folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} f_d &= \exp(rt)f + \phi(S_d - \exp(rt)S) \\ f_u &= \exp(rt)f + \phi(S_u - \exp(rt)S) \end{aligned} \quad (15)$$

Die beiden letzten Gleichungen unterscheiden sich auf der rechten Seite nur durch S_d bzw. S_u . Gegenüber der Welt ohne Zinsen, ersetzen also die aufgezinsten Marktwerte

$\exp(rt)f$ und $\exp(rt)S$ f und S . ϕ bleibt von den Zinsen unbeeinflusst. Subtrahieren der Gleichungen ergibt:

$$f_u - f_d = \phi(S_u - S_d) \quad (16)$$

Natürlich resultiert hier genau die obige Definition von ϕ . Die Herleitung erscheint überflüssig. Doch man benötigt genau diesen Schritt zur Ableitung des replizierenden Portefeuilles. Der Kauf eines Anteils ϕ einer Aktie, würde in t zu den Auszahlungen ϕS_u bzw. ϕS_d führen, die $f_u - f_d$, das ist der Abstand der Auszahlungen des Derivats, auseinander liegen. Damit hat man die Spannweite des Derivats über den Kauf eines Anteils der Aktie hergestellt. Was fehlt ist die korrekte Lage. Die wird hergestellt, indem man eine konstante Zahlung abzieht oder dazu zählt, um genau die Zahlungen f_u oder f_d zu erhalten.

6 Arbitrage III - Replizierendes Portefeuille

Jedes Portefeuille, das die gleiche Auszahlungsstruktur wie das Derivat aufweist, muss auf arbitragefreien Kapitalmärkten den gleichen Preis wie das Derivat haben. Wie sieht dieses Portefeuille aus? Kann es aus bekannten Größen konstruiert werden?

Weil wir aus obigen Überlegungen wissen, dass ein Portefeuille bestehend aus ϕ Aktien die Spannweite des Derivats erzielt, kaufen wir einfach ϕ Aktien, um damit die Zahlungsstruktur des Derivats zu erzielen. Dieses Portefeuille weist folgende Zahlungsstruktur auf:

$$t = 0: P_0 = -\phi S,$$

$$t = 1:$$

Falls die Aktie den Wert S_u annimmt, erzielt das Portefeuille:

$$P_u = \phi S_u = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} S_u$$

Realisiert die Aktie dagegen den Wert S_d , erhält man:

$$P_d = \phi S_d = \left(\frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} \right) S_d$$

Umformen ergibt, dass P_u und P_d den Auszahlungen des Derivats zuzüglich desselben konstanten Betrags entsprechen.

$$\begin{aligned} P_u &= f_u \frac{S_u}{S_u - S_d} - f_d \frac{S_u}{S_u - S_d} \\ P_d &= f_u \frac{S_d}{S_u - S_d} - f_d \frac{S_d}{S_u - S_d} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} P_u &= f_u - f_u + \frac{f_u S_u - f_d S_u}{S_u - S_d} \\ P_d &= f_d - f_d + \frac{f_u S_d - f_d S_d}{S_u - S_d} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} P_u &= f_u - f_u \frac{S_u - S_d}{S_u - S_d} + \frac{f_u S_u - f_d S_u}{S_u - S_d} \\ P_d &= f_d - f_d \frac{S_u - S_d}{S_u - S_d} + \frac{f_u S_d - f_d S_d}{S_u - S_d} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} P_u &= f_u + \frac{-f_u S_u + f_u S_d + f_u S_u - f_d S_u}{S_u - S_d} \\ P_d &= f_d + \frac{-f_d S_u + f_d S_d + f_u S_d - f_d S_d}{S_u - S_d} \end{aligned} \quad (20)$$

Und schließlich:

$$\begin{aligned} P_u &= f_u + \frac{f_u S_d - f_d S_u}{S_u - S_d} \\ P_d &= f_d + \frac{-f_d S_u + f_u S_d}{S_u - S_d} \end{aligned} \quad (21)$$

Die Auszahlungen P_u bzw. P_d entsprechen den Zahlungen f_u und f_d zuzüglich einer Zahlung $\frac{f_u S_d - f_d S_u}{S_u - S_d}$. Und diese konstante Zahlung kann über die Anleihe oder einen Kredit bzw. Anlage repliziert werden. Dazu setzen wir ψB gleich der Zahlung:

$$\psi B = \frac{f_u S_d - f_d S_u}{S_u - S_d} \quad (22)$$

Der Barwert dieser Zahlung in $t = 0$ ist gleich:

$$\psi B_0 = \psi B \exp(-rt) = \frac{f_u S_d - f_d S_u}{S_u - S_d} \exp(-rt) \quad (23)$$

Das Portefeuille

$$\phi S - \psi B_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} S - \frac{f_u S_d - f_d S_u}{S_u - S_d} \exp(-rt) \quad (24)$$

repliziert die Zahlungsstruktur des Derivats. Alle Werte sind im Voraus bekannt. Nur wenn das Derivat in $t = 0$ einen Preis in dieser Höhe aufweist, gibt es keine Arbitragemöglichkeiten. Denn wäre der Wert des Derivats höher, würde das Derivat für f verkauft und mit f das Portefeuille gekauft werden, wäre der Wert des Derivats niedriger, würde man das Derivat kaufen und für f das Portefeuille verkaufen. Beide Male könnte der Arbitrageur einen risikolosen Gewinn erzielen.

7 Umgekehrt: Herleitung der Bewertung mit Martingalwahrscheinlichkeiten aus dem replizierenden Portefeuille

Umgekehrt kann aus dem Wert des replizierenden Portefeuilles auf den Wert des Derivats geschlossen werden. Wenn Arbitrage ausgeschlossen sein soll, dann muss der Wert des replizierenden Portefeuilles gleich dem Wert des Derivats sein:

$$f = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} S - \frac{f_u S_d - f_d S_u}{S_u - S_d} \exp(-rt) \quad (25)$$

Umformen und anordnen nach f_u und f_d ergibt:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{S_u - S_d} ((f_u - f_d)S - (f_u S_d - f_d S_u) \exp(-rt)) \\ f &= \frac{1}{S_u - S_d} (f_u S - f_d S - f_u S_d \exp(-rt) + f_d S_u \exp(-rt)) \\ f &= \frac{1}{S_u - S_d} (f_u S - f_u S_d \exp(-rt) - f_d S + f_d S_u \exp(-rt)) \\ f &= \frac{1}{S_u - S_d} (f_u (S - S_d \exp(-rt)) - f_d (S - S_u \exp(-rt))) \end{aligned} \quad (26)$$

Zieht man $\exp(-rt)$ vor die Klammer,

$$f = \frac{\exp(-rt)}{S_u - S_d} (f_u(S \exp(rt) - S_d) - f_d(S \exp(rt) - S_u)) \quad (27)$$

erhält man mit den oben definierten Wahrscheinlichkeiten für die Bewertung der Aktie,

$$\begin{aligned} q &= \frac{\exp(rt)S - S_d}{S_u - S_d} \\ (1 - q) &= \frac{S_u - \exp(rt)S}{S_u} - S_d \end{aligned} \quad (28)$$

schließlich auch hier die Bewertung des Derivats mit den Martingalwahrscheinlichkeiten:

$$f = \exp(-rt)(f_u q - f_d(1 - q)) \quad (29)$$

Nicht nur ergibt sich das replizierende Portefeuille aus der Bewertung mit Martingalwahrscheinlichkeiten, sondern auch die Bewertung mit Martingalwahrscheinlichkeiten folgt aus der Existenz eines replizierenden Portefeuilles. Arbitragefreie Bewertung und Bewertung mittels Martingalwahrscheinlichkeiten sind äquivalente Sachverhalte.

8 Zinswirkung

Welchen Einfluss haben Zinsänderungen auf den Wert des Derivats? Angenommen, die Größen S , S_d und S_u bleiben bei steigendem Zins gleich.² Dann steigt die Martingalwahrscheinlichkeit q mit steigendem Zins. Dies liegt daran, dass in der Beziehung

$$S \exp(rt) = qS_u + (1 - q)S_d \quad (30)$$

bei steigenden Zinsen $S \exp(rt)$ größer wird, daher muss S_u ein stärkeres Gewicht erhalten. Die Wahrscheinlichkeit q ist das Gewicht, daher muss q steigen. Dieser Zusammenhang wird auch ersichtlich, wenn ausgehend von der Bestimmungsgleichung für q ,

$$q = \frac{S \exp(rt) - S_d}{S_u - S_d} \quad (31)$$

nach der Wahrscheinlichkeit abgebildet wird. Die Ableitung von q nach dem risikolosen Zinssatz ergibt:

$$\frac{dq}{dr} = \frac{St \exp(rt)}{S_u - S_d} > 0 \quad (32)$$

Auch hier ergibt sich - wie schon intuitiv vermutet -, dass q mit steigendem r steigt. Wie wirkt sich eine Zinsänderung auf den Wert des Derivats aus? Da

$$f = \exp(-rt)(qf_u + (1 - q)f_d) \quad (33)$$

²Diese Annahme ist nicht unproblematisch. Sowohl in theoretischen Aktienbewertungsmodellen wie dem CAPM als auch in der Realität beeinflusst die Höhe der Zinsen die Bewertung von Aktien.

gibt es zwei Effekte. Einerseits gewichtet die gestiegene Wahrscheinlichkeit q die Zahlung f_u stärker, andererseits wird der gestiegene Erwartungswert stärker abdiskontiert. Die Zinswirkung ergibt sich analytisch über die Ableitung von f nach dem Zinssatz r :

$$\frac{df}{dr} = -t \exp(-rt)(qf_u + (1-q)f_d) + \exp(-rt) \frac{dq}{dr}(f_u - f_d) \quad (34)$$

Die Ableitung dq/dr wurde weiter oben ermittelt. Eingesetzt und umgeformt erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} &= -t \exp(-rt)(qf_u + (1-q)f_d) + \exp(-rt) \frac{tS \exp(rt)}{S_u - S_d}(f_u - f_d) \\ \frac{df}{dr} &= -t \exp(-rt)(q(f_u - f_d) + f_d) + tS \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} \end{aligned} \quad (35)$$

Eliminieren der Wahrscheinlichkeit q durch $(\exp(rt)S - S_d)/(S_u - S_d)$ führt schließlich zu

$$\frac{df}{dr} = t \frac{\exp(-rt)}{S_u - S_d}(S_d f_u - f_d S_u) \quad (36)$$

Für das Vorzeichen, also ob der Wert des Derivats mit steigenden Zinsen steigt oder sinkt, ist das Vorzeichen von $S_d f_u - f_d S_u$ entscheidend:

$S_d f_u - f_d S_u > 0 \Leftrightarrow$ Der Wert des Derivats steigt mit steigenden Zinsen,

$S_d f_u - f_d S_u < 0 \Leftrightarrow$ Der Wert des Derivats sinkt mit steigenden Zinsen.

Für $f_d = 0$ ist der Ausdruck immer positiv, der Wert des Derivats steigt mit steigenden Zinsen. Für Werte $f_d > 0$, kann der Ausdruck $S_d f_u - f_d S_u > (<) 0$ umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned} S_d f_u - f_d S_u &> 0 \\ \frac{f_u}{f_d} &> \frac{S_u}{S_d} \end{aligned} \quad (37)$$

Für $f_d > 0$ entscheidet also das Verhältnis der beiden Zahlungen in t , ob der Wert des Derivats mit steigenden Zinsen steigt oder fällt.

9 Wirkung einer Preisänderung des Underlying

Zu guter Letzt untersuchen wir die Auswirkungen einer Änderung des Aktienkurses auf den Wert des Derivats. Der Wert des Derivats ist

$$\begin{aligned} f &= \exp(-rt)(qf_u + (1-q)f_d) \\ f &= \exp(-rt)(q(f_u - f_d) + f_d) \end{aligned} \quad (38)$$

Leitet man diesen Wert nach S ab, erhält man

$$\frac{df}{dS} = \exp(-rt) \left(\frac{dq}{dS}(f_u - f_d) \right). \quad (39)$$

Die Ableitung der Martingalwahrscheinlichkeit q ist, da

$$q = \frac{\exp(rt)S - S_d}{S_u - S_d} \quad (40)$$

$$\frac{dq}{dS} = \frac{\exp(rt)}{S_u - S_d} \quad (41)$$

Eingesetzt ergibt sich für die Ableitung des Derivats nach dem Aktienkurs S

$$\frac{df}{dS} = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} \quad (42)$$

Dieser Parameter wird in der Regel mit Δ bezeichnet. Er bezeichnet die Reagibilität des Derivats in Bezug auf Änderungen des Preises des Underlying. Ein anderer Begriff ist Hedgeparameter, damit wird ausgedrückt, welche Menge des Underlying man kaufen oder verkaufen muss, um die Preisänderung des Derivats zu kompensieren. Verkauft man z. B. ein Derivat für f und kauft $\Delta \cdot S$ des Underlying, dann verändert sich der Wert des Portefeuilles bei Änderungen des Aktienkurses nicht:

$$d(f - \Delta \cdot S)/dS = \Delta - \Delta = 0. \quad (43)$$

Achtung: Auch bei Δ handelt es sich nicht um eine Wahrscheinlichkeit. Dies sieht man daran, dass Δ bei entsprechenden Ausprägungen von f_u , f_d , S_d und S_u negativ und größer als 1 sein kann. Wahrscheinlichkeiten dagegen liegen immer zwischen 0 und 1.

10 Schlussbemerkung

In einer Welt, in der in Zukunft einer von zwei Umweltzuständen realisiert wird, reichen zwei Wertpapiere, nämlich eine Aktie mit unterschiedlichen Zahlungen in den beiden Umweltzuständen und ein risikoloses Wertpapier, um Martingalwahrscheinlichkeiten abzuleiten. Für jedes Wertpapier muss der mit diesen Wahrscheinlichkeiten gebildete Erwartungswert auf arbitragefreien Märkten dem aufgezinsten Marktwert entsprechen. Arbitragefreiheit und die Existenz von Martingalwahrscheinlichkeiten sind äquivalente Sachverhalte.

Literatur

- [BR96] Martin Baxter und Andrew Rennie. *Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge: University Press, 1996.